SÍNTESIS DIMENSIONAL DE GENERACIÓN DE FUNCIÓN CON CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS – ESTUDIO DE UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

Jaime F. Echeverría Y.

Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE
Departamento de Ciencias de la Energía y Mecánica
jfecheverria@espe.edu.ec

RESUMEN

El presente trabajo muestra el desarrollo, resolución y aplicación del método de puntos de precisión finitos en la síntesis analítica dimensional de generación de función y su empleo en un caso práctico de ingeniería, adicionalmente se muestra el uso de un software de simulación de mecanismos como Artas SAM para la verificación del mecanismo diseñado.

ABSTRACT

This paper presents the development and implementation of the resolution method for finite precision points in the dimensional analytical synthesis of generating of function and its employment in a engineering practical case, additionally using a software simulation mechanisms is shown as Artas SAM for verification mechanism designed.

1 INTRODUCCIÓN

La síntesis dimensional de mecanismos eslabonados permite calcular de forma analítica o gráfica las dimensiones de un mecanismo de cuatro barras para que cumpla una tarea determinada. Si la tarea consiste en generar determinadas posiciones angulares del eslabón de salida del mecanismo ante posiciones angulares dadas del eslabón de entrada entonces la síntesis toma el nombre de síntesis de generación de función.

Este procedimiento tiene varias metodologías de ejecución; en el presente estudio se aplica el método de puntos de precisión (Precision-Point Method-PPM) con el empleo de números complejos, originalmente desarrollado por Freudenstein y Sandor[1], Sandor[2] y posteriormente por Erdman[3],[4].

Recibido: Enero de 2014
Aceptado: Marzo de 2014

Este procedimiento se puede aplicar a un eslabonamiento si su topología permite descomponerlo en subsistemas más sencillos denominadas cadenas abiertas simples (Single Open Chains - SOC) entre las que se cuentan esencialmente las diadas, triadas y tétradas. La tarea del dimensionamiento del eslabonamiento de cuatro barras es simplificada si se conocen un número definido de posiciones de los eslabones de entrada y salida del mecanismo, denominados puntos de precisión. En función del número de eslabones de la SOC y de los puntos de precisión se genera un sistema de ecuaciones complejo, no lineal. El caso de cuatro puntos de precisión, puede ser resuelto mediante el empleo de la ecuación de compatibilidad y el uso de variables prescritas y de libre elección. El presente trabajo muestra la aplicación de este procedimiento para la síntesis de un caso práctico, los cálculos son efectuados con el auxilio de MathCAD y la simulación del mecanismo sintetizado es verificada con Artas SAM.

La metodología de síntesis dimensional considera la suposición de cuerpo rígido que considera a los eslabones indeformables.

2 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIÓN CON CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN

2.1 Pivotes fijos no especificados

Esta primera metodología considera que la posición de los pivotes fijos puede ser cualquiera. Considérese el mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 1, en el que se identifican el eslabón de entrada, motriz o conductor 2, el eslabón de salida, seguidor o conducido 4 y el eslabón acoplador 3.

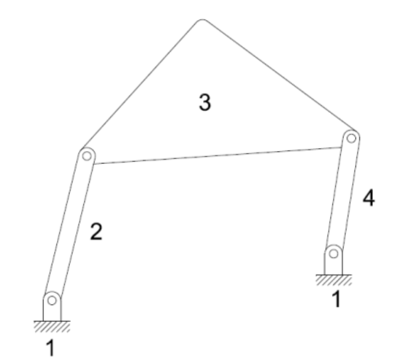


Figura 1 Mecanismo de cuatro barras.

Supóngase que el mecanismo cambia de posición al girar el eslabón 2 desde la posición inicial a una posición cualquiera, con lo que los eslabones 3 y 4 adquieren las nuevas posiciones mostradas en la figura 2.

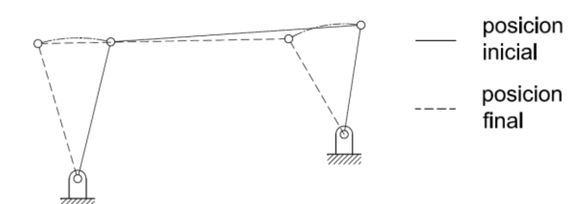


Figura 2 Posiciones del eslabonamiento debido a un giro del motriz.

El mecanismo se descompone en una diada constituida por los eslabones motriz y acoplador y una cadena abierta auxiliar de eslabón único formada por el conducido. Las longitudes significativas de los eslabones están dadas por los vectores posición de los pares cinemáticos[1] del mecanismo y se representan vectorialmente en la figura 3.

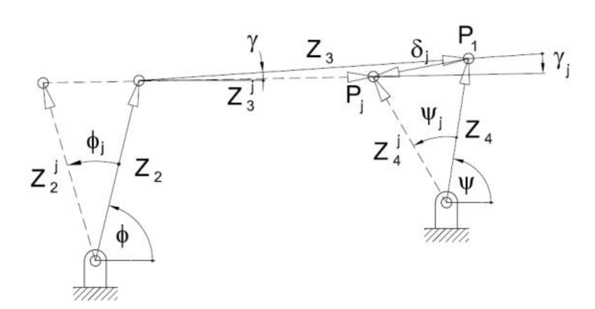


Figura 3 Representación vectorial[2]

Los puntos de precisión para el caso de la generación de función en el mecanismo de cuatro barras están especificados por el par cinemático de rotación P entre el eslabón acoplador y el conducido y se denotan en la figura 3 como P_1 y P_j para la posición inicial y la j-ésima respectivamente; adicionalmente se muestra el vector desplazamiento δ_j entre ambas posiciones. La primera ecuación vectorial de lazo cerrado que se puede establecer para la diada $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3$ es:

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \boldsymbol{\delta}_j - \mathbf{Z}_2^j - \mathbf{Z}_3^j = 0 \tag{1}$$

Si se utiliza los números complejos para identificar a los vectores mediante su forma polar, entonces:

$$\mathbf{Z} = Ze^{i\theta} \tag{2}$$

Donde la nomenclatura de la ecuación (2) está asociada a la figura 4:

[1] Par cinemático – Unión rotatoria eslabón-eslabón.
[2] La notación vectorial en el presente artículo se expresará con letras en negrilla, tanto en gráficos como ecuaciones.

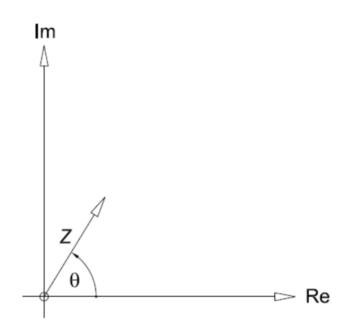


Figura 4 Forma polar de un número complejo

La ecuación (1) se puede reescribir como:

$$\mathbf{Z}_2^j - \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3^j - \mathbf{Z}_3 = \boldsymbol{\delta}_j$$

y aplicando la forma polar:

$$Z_2 e^{i(\phi_j + \phi)} - Z_2 e^{i\phi} + Z_3 e^{i(\gamma_j + \gamma)} - Z_3 e^{i\gamma} = \boldsymbol{\delta}_j$$

que finalmente se simplifica a:

$$\mathbf{Z}_2\left(e^{i\phi_j} - 1\right) + \mathbf{Z}_3\left(e^{i\gamma_j} - 1\right) = \boldsymbol{\delta}_j \quad (3)$$

Conocida como la "ecuación estándar de una diada", además se puede escribir, para el eslabón 4:

$$\mathbf{Z}_4^j - \mathbf{Z}_4 = \boldsymbol{\delta}_j$$

Por lo que:

$$\mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_j} - 1\right) = \boldsymbol{\delta}_j \quad (4)$$

Igualando las expresiones (3) y (4) se tiene:

$$\mathbf{Z}_2\left(e^{i\phi_j} - 1\right) + \mathbf{Z}_3\left(e^{i\gamma_j} - 1\right) = \boldsymbol{\delta}_j = \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_j} - 1\right) \quad (5)$$

La ecuación (5) se aplica cuando el mecanismo se ha movido desde la posición inicial hasta la posición j-ésima. Si el mecanismo se mueve a través de de cuatro puntos de precisión entonces j = 2, 3, 4 cuyos índices aplicados a la ecuación (5) generan el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_2\left(e^{i\phi_2} - 1\right) + \mathbf{Z}_3\left(e^{i\gamma_2} - 1\right) &= \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_2} - 1\right) \\
\mathbf{Z}_2\left(e^{i\phi_3} - 1\right) + \mathbf{Z}_3\left(e^{i\gamma_3} - 1\right) &= \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_3} - 1\right) \\
\mathbf{Z}_2\left(e^{i\phi_4} - 1\right) + \mathbf{Z}_3\left(e^{i\gamma_4} - 1\right) &= \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_4} - 1\right)
\end{aligned} \quad (6)$$

La siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el sistema (6):

Variables prescritas	Incógnitas	Variables deelección libre
ϕ_2,ϕ_3,ϕ_4 ψ_2,ψ_3,ψ_4	$\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_4$, γ_2, γ_3, γ_4

Una vez dimensionados los eslabones 2 y 3 a partir del sistema (6) con el procedimiento que se explicará a continuación, se puede calcular la dimensión del bastidor, como:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \tag{7}$$

En el sistema de ecuaciones (6) los términos de la derecha son conocidos, dado que $\mathbf{Z}_4$ así como ψ_2,ψ_3y$\psi_4$están prescritos; sin embargo el sistema tiene tres ecuaciones y apenas dos incógnitas $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$, por lo que para que dicho sistema tenga solución la matriz ampliada del sistema debe tener rango 2, es decir:

$$\begin{vmatrix} e^{i\phi_2}-1 & e^{i\gamma_2}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_2}-1\right) \\ e^{i\phi_3}-1 & e^{i\gamma_3}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_3}-1\right) \\ e^{i\phi_4}-1 & e^{i\gamma_4}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_4}-1\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Si se desarrolla este determinante en base a la segunda columna que contiene a las variables de elección libre se tiene:

$$\boldsymbol{\Delta}_1 + e^{i\gamma_2}\boldsymbol{\Delta}_2 + e^{i\gamma_3}\boldsymbol{\Delta}_3 + e^{i\gamma_4}\boldsymbol{\Delta}_4 = 0 \tag{9}$$

donde,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta}_1 &= -\boldsymbol{\Delta}_2 - \boldsymbol{\Delta}_3 - \boldsymbol{\Delta}_4 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 &= -\begin{vmatrix} e^{i\phi_3}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_3}-1\right) \\ e^{i\phi_4}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_4}-1\right) \end{vmatrix} \\ \boldsymbol{\Delta}_3 &= \begin{vmatrix} e^{i\phi_2}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_2}-1\right) \\ e^{i\phi_4}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_4}-1\right) \end{vmatrix} \\ \boldsymbol{\Delta}_4 &= -\begin{vmatrix} e^{i\phi_2}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_2}-1\right) \\ e^{i\phi_3}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_3}-1\right) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

Dado que ψ_2, ψ_3, ψ_4, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 son valores prescritos, entonces $\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2$, $\mathbf{\Delta}_3$ y $\mathbf{\Delta}_4$ son conocidos. La ecuación (9) se denomina "ecuación de compatibilidad" debido a que el conjunto de variables de elección libre γ_2, γ_3 yγ_4 que satisfacen dicha ecuación harán que el sistema (9) sea compatible, lo que significa que se puedan hallar soluciones para $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$.

Es de notar que la ecuación de compatibilidad requiere únicamente la selección de una variables de elección libre digamos γ_2, las otras dos variables, γ_3 y γ_4, se calculan de dicha ecuación.

El cálculo de γ_3 y γ_4 puede desarrollarse convirtiendo la expresión (9) en dos ecuaciones escalares, pero este procedimiento conlleva a un sistema no lineal de resolución simple pero tediosa. Erdman y Sandor [4] desarrollaron un esquema de solución analítica basado en la construcción geométrica mostrada en la figura 5,

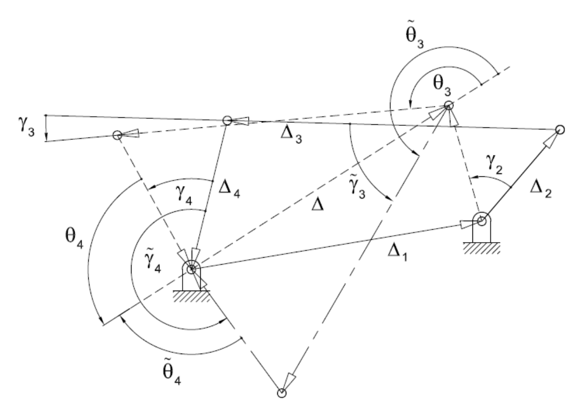


Figura 5 Solución geométrica de la ecuación de compatibilidad

La ecuación (9) puede ser vista como la ecuación de lazo cerrado de un eslabonamiento de cuatro barras denominado "eslabonamiento de compatibilidad" con "eslabón fijo" $\mathbf{\Delta}_1$ y "eslabones móviles" $\mathbf{\Delta}_2$, $\mathbf{\Delta}_3$ y $\mathbf{\Delta}_4$ y "rotaciones eslabonarias" γ_3 y γ_4 medidas desde la "posición inicial" del eslabonamiento de compatibilidad definido por $\mathbf{\Delta}_1 = -\mathbf{\Delta}_2 - \mathbf{\Delta}_3 - \mathbf{\Delta}_4$.

La expresión (9) se puede simplificar a:

$$e^{i\gamma_3}\mathbf{\Delta}_3 + e^{i\gamma_4}\mathbf{\Delta}_4 = -\mathbf{\Delta} \tag{11}$$

donde,

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_1 + e^{i\gamma_2}\mathbf{\Delta}_2 \tag{12}$$

De la construcción geométrica de la figura 5, se observa que existen dos soluciones posibles para γ_3 y otras dos para γ_4, así como dos rotaciones para θ_3 y θ_4. Estas parejas de soluciones se denotan como $\theta_3, \tilde{\theta}_3$; $\theta_4, \tilde{\theta}_4$; $\gamma_3, \tilde{\gamma}_3$ y $\gamma_4, \tilde{\gamma}_4$.

Se tiene que:

$$\cos\theta_3 = \frac{|\boldsymbol{\Delta}_4|^2 - |\boldsymbol{\Delta}_3|^2 - |\boldsymbol{\Delta}|^2}{2|\boldsymbol{\Delta}_3||\boldsymbol{\Delta}|}$$

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \left|\sqrt{1-\cos^2\theta_3}\right| \geq 0$$

Sea $x = \cos\theta_3$, $y = \operatorname{sen}\theta_3 > 0$, entonces,

$$\theta_3 = \operatorname{atan2}(y, x) \text{ para hallar } 0 \leq \theta_3 \leq \pi \tag{13}$$

por lo cual,

$$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3 \tag{14}$$

$$\gamma_3 = \arg(\boldsymbol{\Delta}) + \theta_3 - \arg(\boldsymbol{\Delta}_3) \tag{15}$$

$$\tilde{\gamma}_3 = \arg(\boldsymbol{\Delta}) + \tilde{\theta}_3 - \arg(\boldsymbol{\Delta}_3) \tag{16}$$

De la misma forma se puede determinar $\gamma_4, \tilde{\gamma}_4$ y $\theta_4, \tilde{\theta}_4$, que están dadas por:

$$\begin{aligned} &\theta_4 = \operatorname{atan2}(y, x) \text{ para hallar } 0 \leq \theta_4 \leq \pi \\ &x = \cos\theta_4 = \frac{|\boldsymbol{\Delta}_3|^2 - |\boldsymbol{\Delta}_4|^2 - |\boldsymbol{\Delta}|^2}{2|\boldsymbol{\Delta}_4||\boldsymbol{\Delta}|} \\ &y = \operatorname{sen}\theta_4 = \left|\sqrt{1-\cos^2\theta_4}\right| \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\tilde{\theta}_4 = -\theta_4 \tag{18}$$

$$\gamma_4 = \arg(\boldsymbol{\Delta}) + \theta_4 - \arg(\boldsymbol{\Delta}_4) \tag{19}$$

$$\tilde{\gamma}_4 = \arg(\boldsymbol{\Delta}) + \theta_4 - \arg(\boldsymbol{\Delta}_4) + \pi \tag{20}$$

Cualquier conjunto de valores $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ o $\gamma_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4$ sustituidas en dos de las ecuaciones del sistema (6) permite hallar $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$. Para el conjunto $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ y tomando las dos primeras ecuaciones del sistema (6) las soluciones son:

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_2}-1\right) & e^{i\gamma_2}-1 \\ \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_3}-1\right) & e^{i\gamma_3}-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\phi_2}-1 & e^{i\gamma_2}-1 \\ e^{i\phi_3}-1 & e^{i\gamma_3}-1 \end{vmatrix}} \qquad \mathbf{Z}_3 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\phi_2}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_2}-1\right) \\ e^{i\phi_3}-1 & \mathbf{Z}_4\left(e^{i\psi_3}-1\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\phi_2}-1 & e^{i\gamma_2}-1 \\ e^{i\phi_3}-1 & e^{i\gamma_3}-1 \end{vmatrix}} \tag{21}$$

y $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4$ con $\mathbf{Z}_4$ prescrito.

2.2 Pivotes fijos especificados

En este caso se considera dada la ubicación de los pivotes fijos del mecanismo, es decir está prescrito $\mathbf{Z}_1$. Considérese la figura 6:

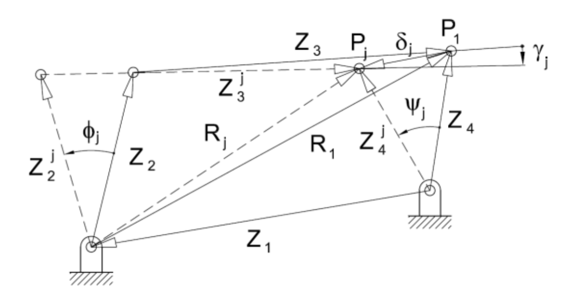


Figura 6 Representación vectorial

A partir de dicha gráfica se puede establecer para el bastidor y el eslabón conducido que:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_1 \tag{22}$$

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{Z}_4^j - \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_j} - \mathbf{Z}_1 \tag{23}$$

Mientras que para la diada $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{Z}_2^j + \mathbf{Z}_3^j &= \mathbf{R}_j \end{aligned} \tag{24}$$

A partir de las expresiones anteriores, se desarrolla el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_2} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_2} &= \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_3} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_3} &= \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_4} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_4} &= \mathbf{R}_4 \end{aligned} \tag{25}$$

Si se sustituye las expresiones que se deriven para cada posición de (23) en (25) y se reacomodan las expresiones, el sistema resultante es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 &= -\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_2} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_2} - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_2} &= -\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_3} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_3} - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_3} &= -\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_4} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_4} - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_4} &= -\mathbf{Z}_1 \end{aligned} \tag{26}$$

y la siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el sistema (26):

Variables prescritas	Incógnitas	Variables deelección libre
ϕ_2,ϕ_3,ϕ_4 ψ_2,ψ_3,ψ_4	$\mathbf{Z}_2,\ \mathbf{Z}_3,\ \mathbf{Z}_4$	$\mathbf{Z}_1,\gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4$

En el sistema de ecuaciones (26) los términos de la derecha son conocidos, dado que $\mathbf{Z}_1$ está prescrito; sin embargo el sistema tiene cuatro ecuaciones y apenas tres incógnitas $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$ y $\mathbf{Z}_4$, por lo que para que dicho sistema tenga solución la matriz ampliada del sistema debe tener rango 3, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_4} & e^{i\gamma_4} & -e^{i\psi_4} & -\mathbf{Z}_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

Si se desarrolla este determinante en base a la segunda columna que contiene a las variables de elección libre se tiene:

$$\mathbf{\Delta}_1 + e^{i\gamma_2}\mathbf{\Delta}_2 + e^{i\gamma_3}\mathbf{\Delta}_3 + e^{i\gamma_4}\mathbf{\Delta}_4 = 0 \tag{28}$$

donde,

$$\mathbf{\Delta}_1 = -\begin{vmatrix} e^{i\phi_2} & -e^{i\psi_2} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_3} & -e^{i\psi_3} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_4} & -e^{i\psi_4} & -\mathbf{Z}_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_3} & -e^{i\psi_3} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_4} & -e^{i\psi_4} & -\mathbf{Z}_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta}_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_2} & -e^{i\psi_2} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_4} & -e^{i\psi_4} & -\mathbf{Z}_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{\Delta}_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_2} & -e^{i\psi_2} & -\mathbf{Z}_1 \\ e^{i\phi_3} & -e^{i\psi_3} & -\mathbf{Z}_1 \end{vmatrix}$$

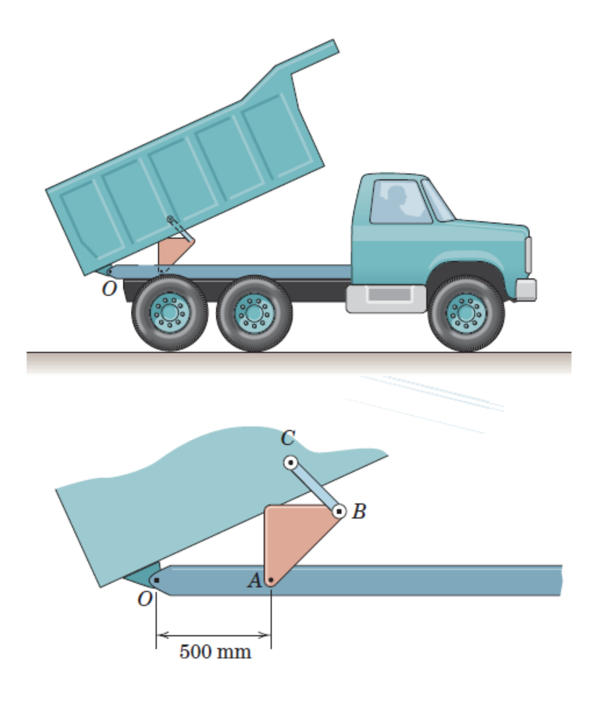
Dado que ϕ_2, ϕ_3,ϕ_4,ψ_2, ψ_3 yψ_4 son valores prescritos, entonces $\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_3$ y $\mathbf{\Delta}_4$ son conocidos, y nuevamente como en el caso de pivotes fijos no especificados la ecuación (28) es una "ecuación de compatibilidad", repitiéndose el mismo proceso del caso anterior en su tratamiento. Para el conjunto γ_2, γ_3 y tomando las tres primeras ecuaciones del sistema (26) las soluciones son:

$$\mathbf{Z}_2=\frac{\begin{vmatrix}-\mathbf{Z}_1 & 1 & -1\\ -\mathbf{Z}_1 & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2}\\ -\mathbf{Z}_1 & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2}\\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3}\end{vmatrix}}\quad \mathbf{Z}_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\mathbf{Z}_1 & -1\\ e^{i\phi_2} & -\mathbf{Z}_1 & -e^{i\psi_2}\\ e^{i\phi_3} & -\mathbf{Z}_1 & -e^{i\psi_3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2}\\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3}\end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{Z}_4=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -\mathbf{Z}_1\\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -\mathbf{Z}_1\\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -\mathbf{Z}_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2}\\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3}\end{vmatrix}} \qquad (29)$$

3 CASO DE APLICACIÓN.

Se desea sintetizar un mecanismo de cuatro barras cuyo objetivo eselevar el contenedor de un volquete desde una posición horizontal 0°, hasta una posición máxima de 48°; se espera que el cajón pase por las posiciones intermedias de 15° y 30°. Adicionalmente se prevé que los pivotes de bastidor estén fijos al chasis del volquete en los puntos O y A indicados en la figura 7,



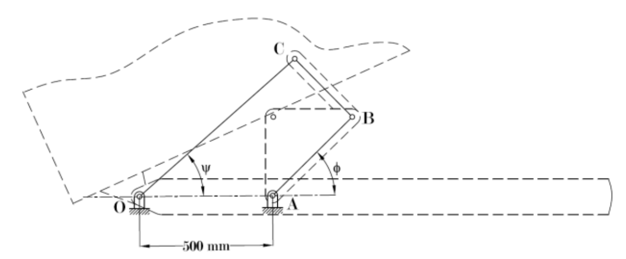


Figura 7 Condiciones del mecanismo de elevación de un volquete – Representación esquemática de variables

La implementación computacional de cálculo generada en MathCAD 15 es:

$i := \sqrt{-1}$

Angulos de rotación del eslabón conductor...

$\phi_2 :=$ $\phi_3 :=$ $\phi_4 :=$

Angulos de rotación del eslabón conducido...

$\psi_2 :=$ $\psi_3 :=$ $\psi_4 :=$

Angulo del acoplador elegido...

$\gamma_2 :=$

Dimensión del eslabon de bastidor...

$Z_1 :=$

Cálculo de γ_3...

$$\Delta_1 := -\left|\begin{pmatrix} e^{i\cdot\phi_2} & -e^{i\cdot\psi_2} & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_3} & -e^{i\cdot\psi_3} & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_4} & -e^{i\cdot\psi_4} & -Z_1 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Delta_2 := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_3} & -e^{i\cdot\psi_3} & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_4} & -e^{i\cdot\psi_4} & -Z_1 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Delta_3 := -\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & -e^{i\cdot\psi_2} & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_4} & -e^{i\cdot\psi_4} & -Z_1 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Delta_4 := \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & -e^{i\cdot\psi_2} & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_3} & -e^{i\cdot\psi_3} & -Z_1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Delta := \Delta_1 + e^{i\cdot\gamma_2}\cdot\Delta_2$$

$$x := \frac{\left(\left|\Delta_4\right|\right)^2 - \left(\left|\Delta_3\right|\right)^2 - \left(\left|\Delta\right|\right)^2}{2\cdot\left|\Delta_3\right|\cdot\left|\Delta\right|} \qquad y := \left|\sqrt{1-x^2}\right|$$

$$\theta_3 := \operatorname{atan2}(x, y) \qquad \gamma_3 := \arg(\Delta) + \theta_3 - \arg\left(\Delta_3\right)$$

Cálculo de Z_2, Z_3 y Z_4...

$$Z_2 := \frac{\left| \begin{pmatrix} -Z_1 & 1 & -1 \\ -Z_1 & e^{i\cdot\gamma_2} & -e^{i\cdot\psi_2} \\ -Z_1 & e^{i\cdot\gamma_3} & -e^{i\cdot\psi_3} \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & e^{i\cdot\gamma_2} & -e^{i\cdot\psi_2} \\ e^{i\cdot\phi_3} & e^{i\cdot\gamma_3} & -e^{i\cdot\psi_3} \end{pmatrix} \right|}$$

$$Z_3 := \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & -Z_1 & -1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & -Z_1 & -e^{i\cdot\psi_2} \\ e^{i\cdot\phi_3} & -Z_1 & -e^{i\cdot\psi_3} \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & e^{i\cdot\gamma_2} & -e^{i\cdot\psi_2} \\ e^{i\cdot\phi_3} & e^{i\cdot\gamma_3} & -e^{i\cdot\psi_3} \end{pmatrix} \right|}$$

$$Z_4 := \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & e^{i\cdot\gamma_2} & -Z_1 \\ e^{i\cdot\phi_3} & e^{i\cdot\gamma_3} & -Z_1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i\cdot\phi_2} & e^{i\cdot\gamma_2} & -e^{i\cdot\psi_2} \\ e^{i\cdot\phi_3} & e^{i\cdot\gamma_3} & -e^{i\cdot\psi_3} \end{pmatrix} \right|}$$

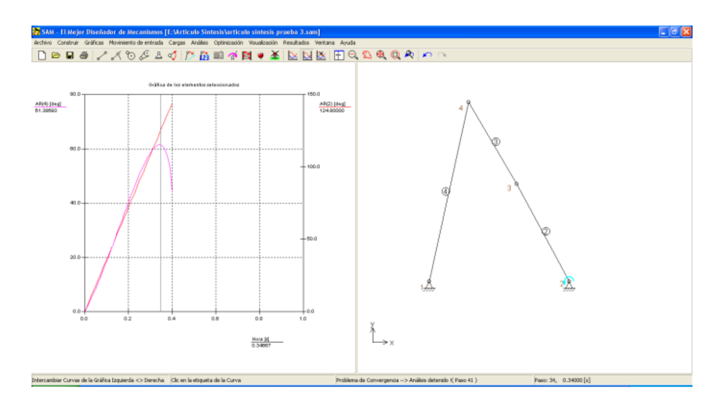
Con esta implementación escrita en MathCAD para valores prescritos de:

$$\phi_2 = 30^\circ; \quad \phi_3 = 55^\circ; \quad \phi_4 = 100^\circ$$
$$\psi_2 = 15^\circ; \quad \psi_3 = 30^\circ; \quad \psi_4 = 48^\circ$$
$$\gamma_2 = 9^\circ$$
$$\mathbf{Z}_1 = 500$$

se obtiene los siguientes resultados,

$$\mathbf{Z}_2 = 393.465 - 27.571i$$
$$\mathbf{Z}_3 = -265.755 + 209.058i$$
$$\mathbf{Z}_4 = 627.71 + 181.487i$$

Se configura el mecanismo con las dimensiones sintetizadas en Artas SAM y se obtiene el rango de ángulos del eslabón conducido entre 0° y 61°. Evidentemente el mecanismo podría tener problemas de defectos de circuito e incluso podría desarmarse en determinada posición, para ello la simulación anterior es fundamental con el objeto de analizar defectos en la síntesis. La pantalla capturada del mecanismo y la gráfica del ángulo relativo del movimiento del seguidor (eslabón 4) y del motriz (eslabón 2) se muestra a continuación:



La gráfica de ángulos relativos proporcionada por Artas SAM confirma que aproximadamente 61.46° de desplazamiento angular del eslabón de salida correspondiente a 122.4° del eslabón conductor en el mecanismoes el máximo desplazamiento angular posible; se puede verificar igualmente que más allá de los 144° de desplazamiento angular del eslabón motriz se desarma el mecanismo lo que es fácil confirmar con una simple construcción geométrica en AutoCAD.

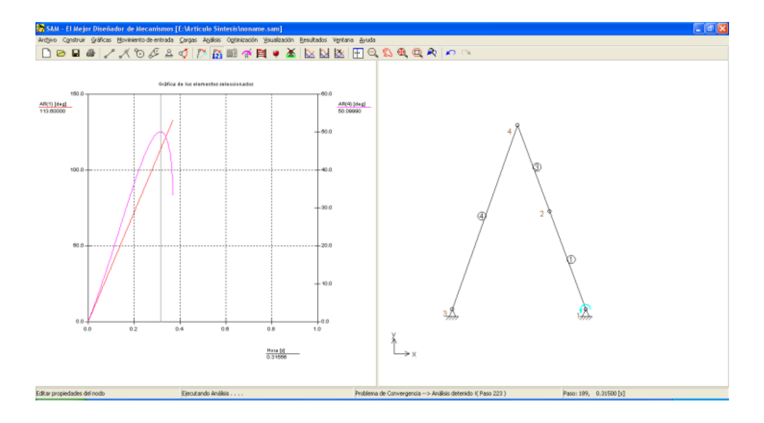
Aunque cumple con el rango del eslabón de salida, se podría mejorar el diseño probando por ensayo y error con nuevos valores para las variables prescritas y de elección libre; así para:

$$\phi_2 = 32.8^\circ; \quad \phi_3 = 60.8^\circ; \quad \phi_4 = 110.4^\circ$$
$$\psi_2 = 15.72969^\circ; \quad \psi_3 = 30.60642^\circ; \quad \psi_4 = 48.36473^\circ$$
$$\gamma_2 = 9.77101^\circ$$
$$\mathbf{Z}_1 = 500$$

se obtiene,

$$\mathbf{Z}_2 = 391.059 - 20.708i$$
$$\mathbf{Z}_3 = -205.574 + 277.068i$$
$$\mathbf{Z}_4 = 685.485 + 256.36i$$

Simulado este mecanismo en Artas SAM produce el siguiente gráfico:



Este mecanismo tiene un máximo desplazamiento angular de 50.0999° (más cercano a los 48° requeridos) con un ángulo del eslabón motriz de 113.6°, desarmándose el mecanismo si el eslabón motriz supera los 133.2°.

Con cálculos adicionales se puede refinar aún más los valores deseados y con un proceso de optimización se podría controlar el ángulo de transmisión.

4 CONCLUSIONES

La tarea de síntesis cinemática es fundamental en el diseño de mecanismos y máquinas pues le permiten al ingeniero de diseño tener una visión clara del funcionamiento del mecanismo, sus defectos y potencialidades.

A partir de esta síntesis el ingeniero de diseño podría mejorar el mecanismo y tomar algunas decisiones respecto a la forma de los eslabones y maneras de aplicar movimientos de entrada, por ejemplo en el caso brevemente analizado se podría construir un eslabón ternario de entrada para conectarlo a un cilindro hidráulico que actué sobre el mecanismo dentro del rango de desplazamiento angular simulado para el eslabón motriz.

Respecto del método se puede concluir que dada la no linealidad de las ecuaciones involucradas en la metodología, usualmente se requiere de cierta práctica y experiencia en la selección de valores de las variables de libre elección y las variables prescritas que no se definen en el diseño del mecanismo, adicionalmente hay que simular el mecanismo para descartar la presencia de defectos de circuito en el mecanismo dado que el método no advierte de su presencia durante los cálculos.

En posteriores trabajos se analizará metodologías que permiten elegir posicionamientos de los pivotes fijos y móviles mediante la teoría de Burmester de círculos de punto central y de punto circular, además se ampliará el estudio a más puntos de precisión finitos y a puntos de precisión infinitesimales, así como a eslabonamientos de más de cuatro barras. Adicionalmente se tratará con la síntesis de generación de trayectoria y de generación de movimiento o guiado de cuerpo rígido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Freudenstein, F. y G.N. Sandor, “Synthesis of Path Generating Mechanisms by Means of Programmed Digital Computer”, *ASME Journalfor Engineering in Industry*, 1959, 81, p.2

[2] Sandor, G.N, “A General Complex Number Method for Plane Kinematic Synthesis with Applications” *Tesis de Doctorado, Columbia University*, University Microfilms, 1959, Ann Arbor MI

[3] Erdman, A.G, “Three and FourPrecision Point KinematicSynthesis of PlanarLinkage”, *Mechanism and Machine Theory*, 16, pp. 227-245

[4] Sandor, G.N y Erdman A, “Advanced Mechanism Design – Analysis and Synthesis”, Prentice – Hall, 1ra Ed, 1984, Capítulo 3.

[5] Sandor, G.N y Erdman A, “Diseño de Mecanismos-Análisis y Síntesis”, Pearson – Prentice-Hall, 3ra Ed, 1998, Capítulo 8.

[6] Norton R.L, “Diseño de Maquinaria”, McGraw-Hill, 5ta Ed, 2012, Capítulos 3 y 5.

[7] Waldron, K.J, Kinzel, G. L, “Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery”,Wiley & Sons, 2da. Ed., 2004, Capítulo 6.

[8] Artas SAM 6.1 Manual del Usuario, 2008.